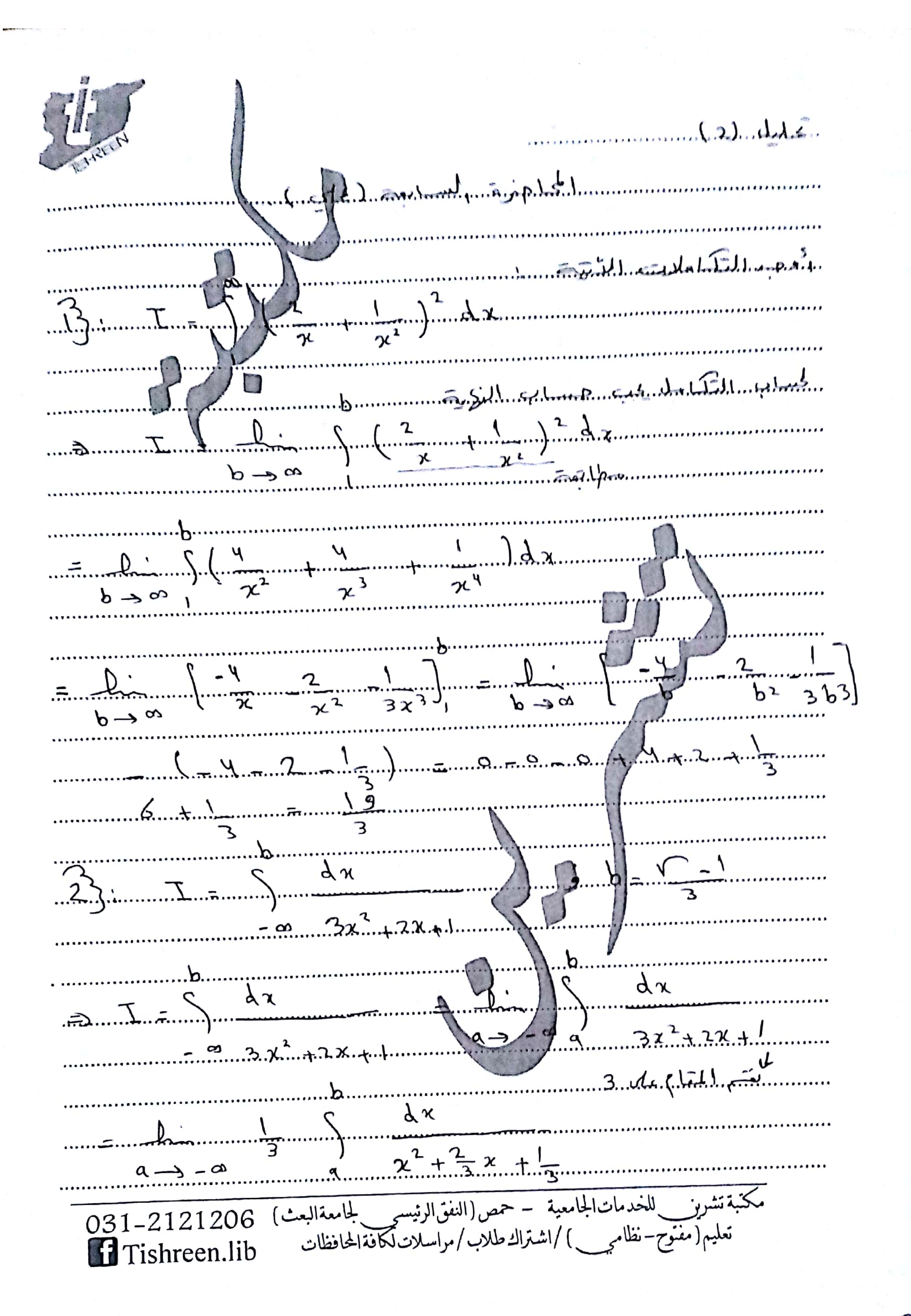


تحليل (2)

المحاضرة السادسة (تابع)

أوجد التكاملات الآتية:

1): $I = \int_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$

لحساب التكامل يجب حساب النهاية

$\Rightarrow I = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx$

نربع

$= \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) dx$

$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3} \right]_{1}^{b} = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{4}{b} - \frac{2}{b^2} - \frac{1}{3b^3} \right]$

$- \left(-4 - 2 - \frac{1}{3} \right) = 0 - 0 - 0 + 4 + 2 + \frac{1}{3}$

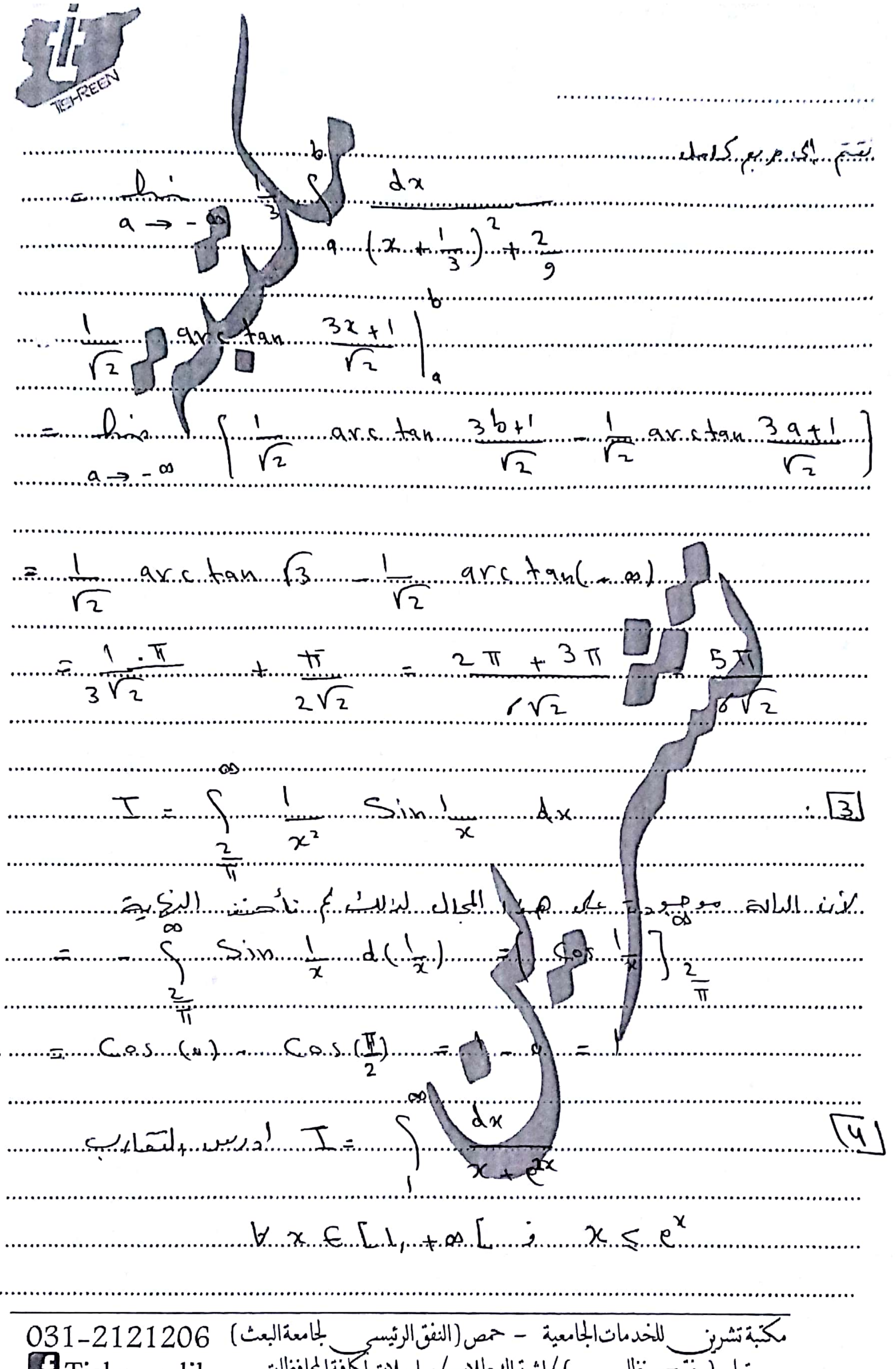
$6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$

2): $I = \int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1}$, $b = \frac{\sqrt{\;} - 1}{3}$

$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1}$

نخرج العامل 3

$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{3} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$



نقسم إلى مربع كامل

$$= \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{3} \int_a^b \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3x+1}{\sqrt{2}} \Big|_a^b$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3b+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{3a+1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(-\infty)$$

$$= \frac{1 \cdot \pi}{3\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{2\pi + 3\pi}{6\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{6\sqrt{2}}$$

3. $$I = \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \, dx$$

لأن الدالة موجودة على هذا المجال لذلك لم نأخذ النهاية

$$= -\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \sin\frac{1}{x} \, d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{\infty}$$

$$= \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

4. ادرس التقارب $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x + e^{2x}}$

$$\forall x \in [1, +\infty[\; ; \; x \leq e^x$$

$\Rightarrow x^2 \leq e^{2x}$

$\Rightarrow x^2 \leq e^{2x} + x$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{e^{2x} + x}$

وبما أن $\int \frac{1}{x^2}$ متقارب $\Leftarrow$ التكامل المعطى متقارب

5: ليكن لدينا التكامل $I = \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ادرس تقارب أو تباعد التكامل

واضح من حدود التكامل أن $x \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} > \frac{1}{x}$

ولدينا

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left[\ln x\right]_2^b = \infty$$

أي أن التكامل متباعد ومنه التكامل المعطى I متباعد

((انتهت المحاضرة لهذا الأسبوع))

«مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح»

إعداد: فاطمة البشيني